УДК 621.372.4:537.52

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕГО ИМПУЛЬСА ОЗОНАТОРА

Ю.Н. Исаев, В.А. Колчанова, О.П. Шпильная, Е.О. Кулешова

Томский политехнический университет
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Показана возможность определения оптимального вида входного напряжения для электротехнических схем замещения первого и второго порядков барьерного разряда. Представлен алгоритм определения оптимальной формы воздействующего импульса напряжения, обуславливающего потребление минимальной энергии электротехническими элементами схемы замещения озонатора.

В системах газо- и водоочистки большой интерес представляет использование импульсного барьерного разряда. Успешно осуществляемая в данном разряде реакция образования озона является одним из немногих плазмохимических процессов, реализованных в промышленном масштабе, причем мощности озонаторных установок непрерывно растут. Этот тип разряда характеризуется, с одной стороны, сравнительно высокой средней энергией электронов 4...5 эВ и с другой – низкой температурой газа, которая близка к температуре электродов. При этом энергия, вложенная в разряд, выделяется в короткоживущих малоинтенсивных искрах – микроразрядах. Сочетание всех этих условий делает барьерный разряд эффективным для осуществления реакций конденсации: и действительно, кроме уже упомянутого процесса образования озона в нем можно проводить многие десятки органических и неорганических синтезов.

При феноменологическом описании электрических разрядов наибольшим успехом пользуется их описание как объектов электрической цепи [1–4]. В основе таких подходов лежит замена электрического разряда некой эквивалентной схемой замещения, состоящей из стандартных электротехнических элементов. Особенности протекания физических процессов определяются формой воздействующего напряжения. В ряде случаев эффективнее оказывается использование импульсного напряжения питания.

На рис. 1 приведена электротехническая схема замещения первого порядка для барьерного разряда, предложенная авторами [2]. Суть данной работы заключается в том, что бы выбрать такую форму воздействующего напряжения, при котором входной генератор выделял (затрачивал) бы наименьшую энергию для достижения заданного значения напряжения на конденсаторе в фиксированный момент времени. Рассмотрим решение такой задачи для схемы, представленной на рис. 1.

Для решения поставленной вариационной задачи [5, 6] необходимо определить переходную функцию по напряжению – $h(t)$, связывающую входное напряжение $u(t)$ с напряжением на конденсаторе $u_c(t)$.

Переходная функция – реакция цепи на единичное воздействие, поэтому, считая, что входное напряжение равняется единице, получаем:

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (1)$$

Рис. 1. *Электротехническая схема замещения первого порядка разрядного промежутка озонатора*

Используя интеграл Дюамеля, можно записать напряжение на конденсаторе с учетом импульса воздействующего напряжения и полученной переходной функции (1):

$$u_c(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau. \quad (2)$$

По условию задачи необходимо минимизировать функционал энергии генератора:

$$u_c(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau. \quad (3)$$

при $t=T$ и дополнительном условии выполнения (2).

Для вариации функционала необходимо выразить ток в цепи $i(t)$, через входное напряжения $u(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_c(t)$:

$$i(t) = \frac{u(t) - u_c(t)}{R} \quad (4)$$

и, подставляя полученное соотношение (4) в выражение (3), с учетом(2) получаем:

$$W = \int_0^T i(t)u(t)dt = \frac{1}{R}\int_0^T (u(t) - u_c(t))u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^T \left(u(t) - \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau \right) u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^T u^2(t)dt - \frac{1}{R^2C}\int_0^T \int_0^t u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau u(t)dt. \quad (5)$$

Теперь можно осуществить условную минимизацию функционала (5) с дополнительным условием (2), которую формально можно записать так [5]:

$$L = W + \lambda \cdot u_c, \quad \delta L = 0,$$

или с учётом фильтрующих свойств дельта-функции

$$\delta(x-t) = \begin{cases} 0 \ \text{при } t \neq x; \\ \infty \ \text{при } t = x \end{cases}$$

и свойств функциональных производных [5]:

$$\frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\varphi(t)} = \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(t)}; \quad \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(t)} = \delta(x-t),$$

можно записать в развёрнутом виде:

$$\delta L = \frac{1}{R}\int_0^T \frac{\partial u^2(t)}{\partial u}\delta(t-\tau)dt -$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_0^T dt \int_0^t \frac{\partial u(t)}{\partial u} u(\tau)\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau +$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_0^T dt \int_0^t \frac{\partial u(\tau)}{\partial u} u(t)\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau +$$

$$+\frac{\lambda}{RC}\int_0^T \frac{\partial u(\tau)}{\partial u}\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(T-\tau)}d\tau = 0. \qquad (6)$$

После простых преобразований получаем, (пояснения приводятся на рис. 2):

$$\int_0^T dt \int_0^t d\tau \rightarrow \int_0^T d\tau \int_\tau^T dt = \int_0^T dt \int_t^T d\tau$$

$$\delta L = \frac{2u(t)}{R} - \frac{1}{R^2C}\int_0^t d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} -$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_t^T d\tau\, u(\tau)e^{\frac{1}{RC}(t-\tau)} + \frac{\lambda}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)} =$$

$$= \frac{2u(t)}{R} - \frac{1}{R^2C}\int_0^T d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}|t-\tau|} +$$

$$+\frac{\lambda}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)} = 0. \qquad (7)$$

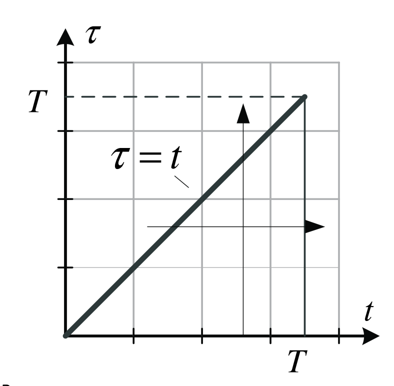


Рис. 2. *Расстановка пределов интегрирования в кратном интеграле*

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Фредгольма второго рода, относительно неизвестной функции $u(t)$ – входного напряжения:

$$u(t) - \frac{1}{2RC}\int_0^T d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}|t-\tau|} = -\frac{\lambda}{2C}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)}. \qquad (8)$$

Осуществляя алгебраизацию ур. (8), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомой функции входного напряжения $u(t)$

$$\Delta t \sum_{s=0}^{N} g_{k,s} \cdot u_s + u_k = -\lambda \cdot h_k, \qquad (9)$$

где

$$h_k = \frac{1}{2C}e^{-\frac{1}{RC}(T-t_k)}; \quad g_k = \frac{-1}{2RC}e^{-\frac{1}{RC}|t_k|};$$

$$g_{k,s} = g(|t_k - t_s|); \quad \Delta t = \frac{T}{N}$$

– шаг дискретизации; $s, p \in 0..N$; N – число точек дискретизации временного интервала. Запишем решение уравнения (9) в матричной форме, введя обозначения, $\mathbf{E}=\{1\}$ – единичная матрица, $\mathbf{G}=\{g_{k,s}\}$ – матрица проводимости, $\mathbf{L}=\{-\lambda \cdot h_k\}$ – матрица, образованная правой частью уравнения (9):

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{E}}{\Delta t}, \ \rightarrow \ \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{L}.$$

На рис. 3 приведён результат восстановления фронта импульса входного напряжения для модельных параметров схемы R=10 Ом; C=40 мкФ и длительности импульса T=1 мкс.

На рис. 4 представлены расчетные графики энергий для трёх разных форм импульсов входного напряжения (рис. 4, *а*, *б*). Сплошной линией показано входное напряжение – оптимальной расчётной формы и соответствующая ему затраченная энергия генератора, пунктиром и штрих-пунктиром изображены неоптимальные импульсы входного напряжения и соответствующие им энергии. На графике видно, что энергия, выделяемая при оптимальной форме воздействующего напряжения, имеет меньшее значение по сравнению с энергиями, полученными в результате воздействия других импульсов.

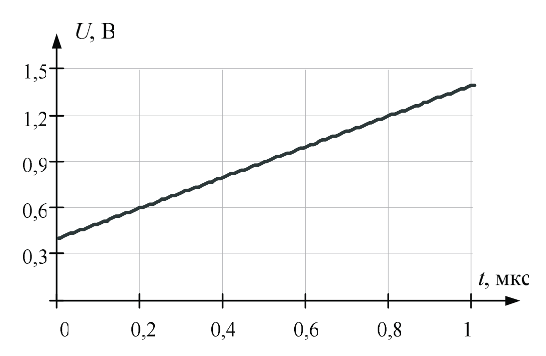
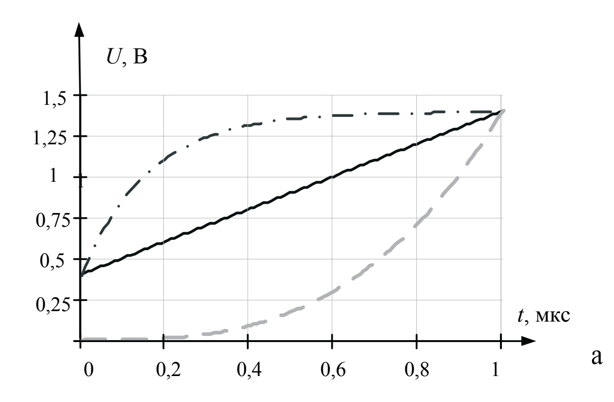


Рис. 3. *Оптимальная форма импульса входного напряжения, полученная в результате расчёта*



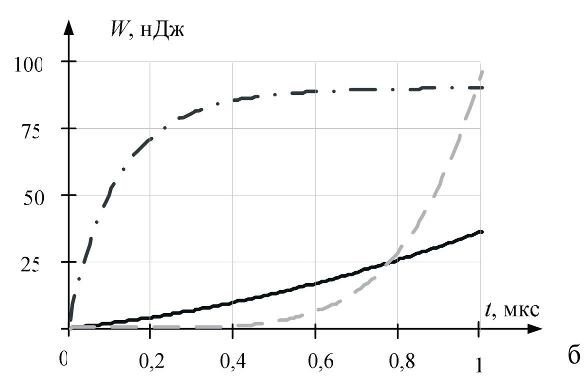


Рис. 4. *Различные формы модельных импульсов входного напряжения и соответствующее им распределение энергии*

В ряде случаев необходимо учесть влияние проводимости межэлектродной субстанции (1/R2 на рис. 5), например, в цепи второго порядка. Рассмотрим алгоритм определения оптимальной формы воздействующего импульса, обуславливающей потребление минимальной энергии электротехническими элементами схемы замещения озонатора – цепи второго порядка на примере модельной задачи. Выберем в качестве величин цепи параметры: $C1=5\cdot10^{-11}$ Ф, $C2=4\cdot10^{-10}$ Ф, $R1=15$ Ом, $R2=15$ Ом.

Схема замещения барьерного разряда представлена на рис. 5, где $C1$ – ёмкость барьеров, ёмкость воздушной среды с вкрапленными каплями воды – $C2$, сопротивление схемы – $R1$, сопротивление межэлектродной субстанции – $R2$.

Для решения поставленной вариационной задачи, как было показано выше, определим переходную функцию по напряжению – $h(t)$, связывающую входное напряжение $u(t)$ с напряжением на конденсаторе $u_{C2}(t)$ для схемы, изображённой на рис. 5.

Считая, что входное напряжение равняется единице, получаем:

$$h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \qquad (10)$$

где

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\cdot R1\cdot C1\cdot R2\cdot C2}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l}-R2\cdot(C2+C1)-R1\times\\ \times C1\pm\sqrt{\begin{array}{l}R2^2 C2(C2+2C1+C1^2)+\\ +R1\cdot C1(C1\cdot R1-2\cdot R2\cdot C2+2\cdot C1\cdot R2\end{array}}\end{array}\right]$$

– корни характеристического уравнения, A_1, A_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий по системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0; \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \dfrac{1}{R1\cdot C2}; \end{cases} \quad A_1 = -A_2 = \frac{1}{(p_1 - p_2)R1\cdot C2}.$$

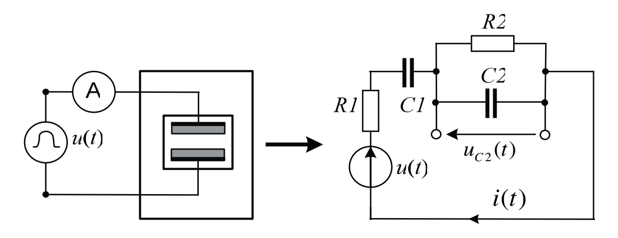


Рис. 5. *Схема замещения барьерного разряда – цепь второго порядка*

Используя интеграл Дюамеля, можно записать напряжение на конденсаторе с учетом импульса воздействующего напряжения и полученной переходной функции (10):

$$u_{C2}(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t u(\tau)(p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)})d\tau,$$

$$H(t-\tau) = p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)}, \qquad (11)$$

$$u_{C2}(t) = \int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau.$$

По условию задачи необходимо минимизировать функционал энергии генератора:

$$W(t) = \int_0^t i(t)u(t)dt, \qquad (12)$$

при $t=T$ и дополнительном условии выполнения (11).

Для вариации функционала необходимо выразить ток в цепи $i(t)$ через входное напряжение $u(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_{C2}(t)$:

$$i(t) = i_{R2}(t) + i_{C2}(t) = \frac{u_{C2}(t)}{R_2} + C2\frac{du_{C2}(t)}{dt}.$$

Подставляя полученное соотношение в выражение (12), с учетом (11) получаем:

$$W = \int_0^T i(t)u(t)dt = \int_0^T \left(\frac{u_{C2}(t)}{R_2} + C2\frac{du_{C2}(t)}{dt}\right)u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R_2}\int_0^T u_{C2}(t)u(t)dt + C2\int_0^T \frac{du_{C2}(t)}{dt}u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R_2}\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau +$$

$$+C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right). \qquad (13)$$

Теперь можно осуществить условную минимизацию функционала (13) с дополнительным условием (11), которую формально можно записать так:

$$L = W + \lambda \cdot u_c, \quad \delta L = 0,$$

$$L = \frac{1}{R_2}\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau +$$

$$+C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right)+$$

$$+\lambda\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau = 0.$$

С учётом изложенного ранее, можно записать:

$$\frac{\delta}{\delta u}\left[\frac{1}{R_2}\int_0^T dt\, u(t)\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\, u(\tau)H(|t-\tau|); \qquad (14)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\lambda\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right)=\lambda\cdot H(T-t). \qquad (15)$$

Выразим в виде суммы двух слагаемых:

$$H_1(t-\tau) = p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)} =$$
$$= H_1(t-\tau) + H_2(t-\tau);$$

$$H_1(t-\tau) = e^{p_1 t}H_1(-\tau);\ H_2(t-\tau) = e^{p_2 t}H_2(-\tau),$$

тогда

$$C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right)=C2A_1p_1\int_0^T u^2(t)dt+$$

$$+C2p_1\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_1(t-\tau)+$$

$$+C2A_2p_2\int_0^T u^2(t)dt + C2p_2\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_2(t-\tau).$$

Как было показано выше в (6–8)

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2A_1p_1\int_0^T u^2(t)dt\right)=C2A_1p_1 2u(t); \qquad (16)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2A_2p_2\int_0^T u^2(t)dt\right)=C2A_2p_2 2u(t). \qquad (17)$$

По аналогии с (14):

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2p_1\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_1(t-\tau)\right)=$$

$$=C2p_1\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_1(|t-\tau|); \qquad (18)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2p_2\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_2(t-\tau)\right)=$$

$$=C2p_2\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_2(|t-\tau|). \qquad (19)$$

Тогда результирующее выражение для минимизируемого функционала с учётом (14–19)

$$\delta L = \frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\, u(\tau)H(|t-\tau|) + 2\cdot C2(A_1p_1 + A_2p_2)u(t)+$$

$$+C2p_1\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_1(|t-\tau|)+$$

$$+C2p_2\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_2(|t-\tau|)+\lambda\cdot H(T-t)=0.$$

Это интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно переходной проводимости неизвестной функции входного напряжения $u(t)$:

$$2\cdot C2\cdot(A_1p_1 + A_2p_2)\cdot u(t) + \frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\, u(\tau)H(|t-\tau|)+$$

$$+C2\cdot p_1\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_1(|t-\tau|)+$$

$$+C2\cdot p_2\int_0^T d\tau\, u(\tau)H_2(|t-\tau|) = -\lambda\cdot H(T-t). \qquad (20)$$

Осуществляя алгебраизацию уравнения (20), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $u(t)$

$$\Delta t\sum_{s=0}^{N} g_{k,s}\cdot u_s + M\cdot u_k = -\lambda\cdot h_k, \qquad (21)$$

где

$$M = 2\cdot C2(A_1p_1 + A_2p_2);\quad h_k = H(T-t_k);$$

$$g_k = \frac{1}{R2}H(|t_k|) + C2p_1H1(|t_k|) + C2p_2H2(|t_k|);$$

$$g_{k,s} = g(t_k - t_s);\quad \Delta t = T/N$$

– шаг дискретизации; $s,p\in 0..N$; N – число точек дискретизации временного интервала. Запишем решение уравнение (20) в матричной форме, введя обозначения, $\mathbf{E}=\{1\}$ – единичная матрица, $\mathbf{G}=\{g_{k,s}\}$ – матрица проводимости, $\mathbf{L}=\{-\lambda\cdot h_k\}$ – матрица, образованная правой частью уравнения (21):

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \frac{M}{\Delta t}\mathbf{E}, \ \rightarrow\ \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{L}.$$

Таким образом, представленный авторами алгоритм может быть использован для оптимизации работы озонатора. Энергия, выделяемая генератором озонатора при оптимальной форме воздействующего напряжения, имеет меньшее значение по сравнению с энергией, полученной в результате воздействия импульса неоптимальной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойлович В.И., Гибалов К.В., Козлов В.К. Физическая химия барьерного разряда. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. – 176 с.
2. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Хохлова Т.Е. Определение параметров двухполюсника при воздействии импульсного напряжения // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 64–67.
3. Лунин В.В., Попович М.П., Ткаченко С.Н. Физическая химия озона. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1998. – 198 с.
4. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1992. – 535 с.
5. Райзер Ю.П. Высокочастотный емкостный разряд. Физика. Техника эксперимента. Приложения. – М.: Изд-во МФТИ: Наука: Физматлит, 1995. – 320 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1976. – 255 с.

УДК 621.372.4:537.52